Mini-teoria della probabilità (classica)

Attenzione: questa è una breve sintesi elementare e nulla più.

Definizione classica della probabilità

Problema di partenza

In un sacchetto ci sono 7 palline bianche e 3 palline nere. Tranne che nel colore, le palline sono *identiche*: sono fatte dello stesso materiale, hanno le stesse dimensioni, sono perfettamente sferiche, ugualmente levigate e così via.

Infilerò una mano nel sacchetto, senza guardarvi dentro, e estrarrò una pallina a caso.

Qual è la probabilità che la pallina estratta sia nera?

- Le palline in tutto sono 7+3 = 10. Estraendo una pallina ho 10 **casi possibili**.
  Non ho alcun motivo di pensare che qualche pallina sia privilegiata rispetto alle altre, cioè abbia una maggiore probabilità di essere estratta. Perciò i 10 casi possibili sono anche **equiprobabili**.
- Fra questi 10 casi possibili, ci sono soltanto 3 casi in cui la pallina estratta è nera. Questi sono i **casi favorevoli** all'evento aspettato.

L'evento "pallina estratta nera" ha perciò 3 possibilità su 10 di verificarsi.

Definisco la sua **probabilità** come il **rapporto** tra i casi favorevoli e quelli possibili e ottengo:

probabilità (pallina nera) = 3/10 = 0,3 = 30%

La risoluzione di questo problema ci fornisce lo spunto per dare una definizione di probabilità di un evento.

Definizione di probabilità (a priori o classica)

La **probabilità** che si verifichi un dato evento (E) è il **rapporto** fra il numero (s) dei **casi favorevoli** all'evento stesso e il numero (n) dei **casi possibili**, purché tutti i casi considerati siano ugualmente probabili.
(Guido Castelnuovo, Calcolo delle probabilità, Zanichelli)

p = p(E) = s/n

Esempi

Esempio 1. Lanciando una moneta, qual è la probabilità che esca testa?
I casi possibili sono 2, testa e croce {T, C}, i casi favorevoli sono 1 {T}
p(testa) = 1/2

Esempio 2. Lanciando un dado, qual è la probabilità che esca il 5?
I casi possibili sono 6, {1, 2, 3, 4, 5, 6}, i casi favorevoli sono 1 {5}
p(5) = 1/6

Esempio 3. Estraendo una carta da un mazzo di 40, qual è la probabilità che sia una figura?
I casi possibili sono 40, i casi favorevoli sono 12, perché le figure sono 12
p(figura) = 12/40

Esempio 4. Al gioco del lotto, qual è la probabilità che esca un numero dato, in una estrazione di 5 numeri?
I casi possibili sono tutte le cinquine, i casi favorevoli sono le cinquine che contengono il numero dato.
a) totale cinquine = combinazioni di 90 elementi a 5 a 5 = 90! / (5! · 85!)

b) totale cinquine con numero fisso = combinazioni di 89 elementi a 4 a 4 = 89! / (4! · 85!)
p(estratto al lotto) = 90! / (5! · 85!) / 89! / (4! · 85!) = 5/90

Il principio di indifferenza o della ragione non sufficiente

Per definire la probabilità si usa il concetto di eventi equiprobabili.

Questo non va bene perché per definire un concetto non si può usare il concetto stesso, altrimenti la definizione diventa circolare. E non definisce niente.

Perciò è necessario chiarire che cosa si intende per **eventi equiprobabili**.

A tale scopo si può introdurre il concetto del **principio della ragione non sufficiente** o **principio di indifferenza**, il quale asserisce che:

dato un gruppo di eventi, se non ci sono valide ragioni per pensare che qualche evento si verifichi più o meno facilmente degli altri, allora tutti gli eventi del gruppo si devono considerare equiprobabili.

Nota. Per calcolare il numero dei casi possibili e di quelli favorevoli, in molti casi serve il **calcolo combinatorio**. Per una semplice introduzione, vedi le seguenti pagine, su questo sito:

Le basi della Combinatoria

Permutazioni, disposizioni, combinazioni

Estremi della probabilità

La probabilità di un evento p(E) è sempre un numero compreso fra 0 e 1:
0 <= p(E) <= 1

Un evento che ha probabilità 0 è detto **evento impossibile**.

Un evento che ha probabilità 1 è detto **evento certo**.

Esempio 1. Estraendo una carta da un mazzo di 40, qual è la probabilità che sia un 10 di cuori?
I casi possibili sono 40 i casi favorevoli sono 0, perché nei mazzi da 40 carte non ci sono i numeri 8, 9, 10.
p(10 di cuori) = 0/40 = 0

Esempio 2. Estraendo una pallina da un'urna che contiene 8 palline rosse, qual è la probabilità che la pallina estratta sia rossa?
I casi possibili sono 8 i casi favorevoli sono 8, perché le ci sono 8 palline rosse.
p(pallina rossa) = 8/8 = 1

Come si può esprimere la probabilità: numero, rapporto, percentuale

La probabilità di un evento si può esprimere:

a) come frazione, ad esempio 3/4

b) come numero decimale, ad esempio 3/4 = 3 : 4 = 0,75

c) come percentuale, ad esempio 0,75 = 75%

Nota. Per trasformare un rapporto in una percentuale si divide il numeratore per il denominatore e si moltiplica il risultato per 100.

Definizione statistica della probabilità

In una serie di prove ripetute un gran numero di volte nelle stesse condizioni, ciascuno degli eventi possibili si manifesta con una **frequenza relativa** che è presso a poco uguale alla sua **probabilità**. L'approssimazione cresce ordinariamente con il numero delle prove. *(Guido Castelnuovo, Calcolo delle probabilità, Zanichelli)*

frequenza relativa -> probabilità

Nota. La **frequenza relativa** di un evento è il rapporto fra il numero di volte che si è verificato tale evento e il numero totale delle prove fatte.
Si può esprimere come frazione, come numero decimale o come percentuale.

Esempio 1. Un un'urna ci sono palline bianche e palline nere, ma non si sa quante sono.
Estraendo una pallina, qual è la probabilità che sia nera?
Per rispondere, dobbiamo dapprima fare molte prove, estraendo una pallina alla volta e rimettendola nell'urna.
Supponiamo di aver fatto 85 prove e di aver estratto una pallina nera per 16 volte.
Si calcola quindi la frequenza relativa delle prove favorevoli, ottenendo così un valore approssimato della probabilità.
frequenza relativa = 16/85 = 0,188 = 18,8%
dunque:
p(pallina nera) = 18,8% circa

Eventi indipendenti ed eventi dipendenti

Eventi indipendenti

Due eventi casuali A e B sono **indipendenti** se la probabilità del verificarsi dell'evento A non dipende dal fatto che l'evento B si sia verificato o no, e viceversa.

Esempio 1. Abbiamo due mazzi di carte da 40. Estraendo una carta da ciascun mazzo, i due eventi:
E1 = "La carta estratta dal primo mazzo è un asso"
E2 = "La carta estratta dal secondo mazzo è una carta di fiori"
sono indipendenti.

Eventi dipendenti

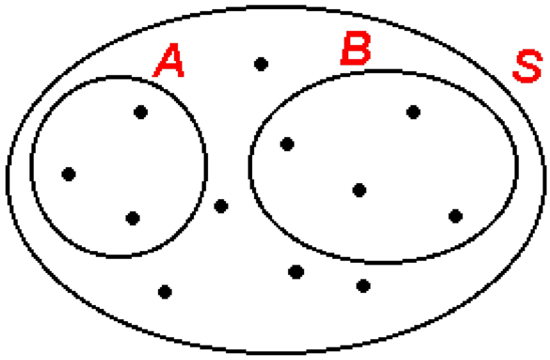
Un evento casuale A è **dipendente** da un altro evento B se la probabilità dell'evento A dipende dal fatto che l'evento B si sia verificato o meno.

Esempio 1. Abbiamo un mazzo di carte da 40. Estraendo due carte in successione, senza rimettere la prima carta estratta nel mazzo, i due eventi:
E1 = "La prima carta estratta è un asso"
E2 = "La seconda carta estratta è un asso"
sono dipendenti. Per la precisione la probabilità di E2 dipende dal verificarsi o meno di E1.
Infatti:
a) la probabilità di E1 è 4/40
b) la probabilità di E2, se la prima carta era un asso, è 3/39
c) la probabilità di E2, se la prima carta non era un asso, è 4/39

Eventi incompatibili ed eventi compatibili

Eventi incompatibili

Si dicono **incompatibili** quegli eventi aleatori che non possono verificarsi simultaneamente in una data prova.

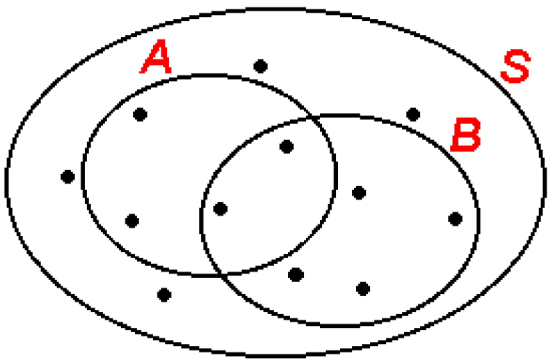


Eventi incompatibili

Esempio 1. Estraendo una carta da un mazzo di 40, i due eventi:
E1 = "Esce l'asso di cuori"
E2 = "Esce una figura"
sono incompatibili.

Eventi compatibili

Due eventi sono, invece, **compatibili** se c'è anche una sola possibilità che possano verificarsi simultaneamente, in una data prova.



Eventi compatibili

Esempio 1. Estraendo una carta da un mazzo di 40, i due eventi:
E1 = "Esce una figura"
E2 = "Esce una carta di cuori"
sono compatibili perché in una estrazione potrebbe uscire una figura di cuori.

Probabilità composta di eventi indipendenti/dipendenti

Siano A e B due eventi. Indichiamo con (A et B) l'evento che si verifica se e soltanto se si verificano sia A sia B.

Probabilità composta di eventi indipendenti

Se i due eventi sono **indipendenti**, cioè il verificarsi dell'uno non influisce sulla probabilità dell'altro, la probabilità dell'evento (A et B) è uguale al prodotto delle probabilità di A e B:

p(A et B) = p(A) · p(B) (*con A, B indipendenti*)

Esempio 1. Abbiamo due mazzi di carte da 40. Estraendo una carta da ciascun mazzo, consideriamo i due eventi indipendenti:
E1 = "La carta estratta dal primo mazzo è un asso"
E2 = "La carta estratta dal secondo mazzo è una carta di fiori"
Qual è la probabilità che si verifichino entrambi?
p(E1) = 4/40

p(E1) = 10/40
p(E1 et E2) = 4/40 · 10/40 = 40/400 = 1/10

Probabilità composta di eventi dipendenti

Se i due eventi sono **dipendenti**, cioè il verificarsi dell'uno influisce sulla probabilità dell'altro, si può applicare la stessa regola, purché con p(B) si intenda la probabilità di B nell'ipotesi che A si sia verificato.

p(A et B) = p(A) · p(B|A) (*con A, B dipendenti*)

Esempio 1. Un'urna contiene 2 palline bianche e 3 palline rosse. Si estraggono due palline dall'urna in due estrazioni successive senza reintrodurre la prima pallina estratta nell'urna. Calcolare la probabilità che le due palline estratte siano entrambe bianche.
La probabilità che la prima pallina sia bianca è 2/5.
La probabilità che la seconda pallina sia bianca, a condizione che la prima pallina sia bianca, è 1/4.
La probabilità di avere due palline bianche è:
p(due bianche) = 2/5 · 1/4 = 2/20 = 1/10

Probabilità condizionata

La probabilità che accada l'evento A, calcolata a condizione che l'evento B si sia verificato, si dice **probabilità condizionata** o **probabilità di A sotto la condizione B** e si denota con p(A|B).

p(A|B) = p(A et B) / p(B)

Nota. Di solito la probabilità condizionata si applica quando A dipende da B, cioè gli eventi sono dipendenti.
Nel caso in cui A e B sono indipendenti, le formule diventano **p(A|B) = p(A)**. Infatti il verificarsi o meno di B non condiziona la probabilità p(A).

Esempio 1. Qual è la probabilità che estraendo 2 carte da un mazzo di 40, la seconda sia di denari, nota l'informazione che la prima è stata di denari, anche ?
p(denari et denari) = 10/40 · 9/39
oppure
p(denari | denari) = (10/40 · 9/39)/10/40 = 9/39

Probabilità totale di eventi incompatibili/compatibili

Siano A e B due eventi. Indichiamo con (A or B) l'evento che si verifica se e soltanto se si verifica A oppure B oppure entrambi.

Probabilità totale di eventi incompatibili

Se i due eventi sono **incompatibili**, la probabilità dell'evento (A or B) è uguale alla somma delle probabilià di A e di B.

p(A or B) = p(A) + p(B) (*con A, B incompatibili*)

Esempio 1. Calcola la probabilità che estraendo una carta da un mazzo da 40, sia un asso oppure una figura.
p(asso) = 4/40
p(figura) = 12/40
p(asso or figura) = 4/40 + 12/40 = 16/40 = 2/5

Probabilità totale di eventi compatibili

Se i due eventi sono **compatibili**, la probabilità dell'evento (A or B) è uguale alla somma delle probabilià di A e di B meno la probabilità che si verifichino entrambi.

p(A or B) = p(A) + p(B)- p(A et B) (*con A, B compatibili*)

Esempio 1. Un'urna contiene venti palline numerate da 1 a 20. Calcola la probabilità dell'evento C = "La pallina estratta ha un numero multiplo di 2 oppure ha un numero

multiplo di 5”.
Gli eventi "multiplo di 2" e "multiplo di 5" sono compatibili, infatti 10 e 20 sono multipli sia di 2 sia di 5.
p(multiplo di 2) = 10/20
p(multiplo di 5) = 4/20
p(multiplo di 2 e di 5) = 2/20
p(multiplo di 2 e di 5) = 10/20 + 4/20 - 2/20 = 12/20 = 3/5

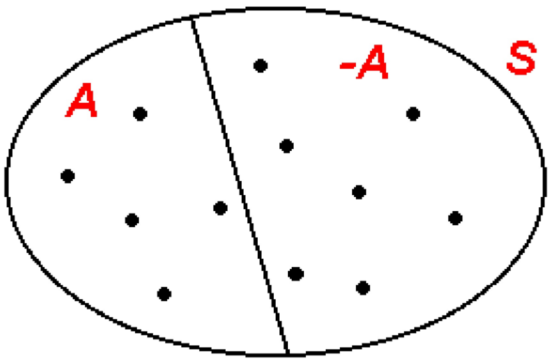
Nota. Quando un evento si può verificare in più modi diversi e fra loro incompatibili, la sua probabilità è la probabilità è la somma delle probabilità corrispondenti a tali modi diversi.

Esempio 2. Lanciando due dadi, qual è la probabilità che la somma dei numeri usciti sia 7?
Il totale 7 si può ottenere in 6 modi diversi e incompatibili (1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1), ciascuno dei quali ha probabilità 1/36.
p(somma 7) = 1/36 + 1/36 + 1/36 + 1/36 + 1/36 + 1/36 = 6/36 = 1/6

Probabilità di eventi contrari

Dato un evento A, si dice **evento contrario** ad A l’evento che si verifica quando non si verifica A, ossia l’evento -A complementare di A.

Due eventi contrari sono incompatibili.



Eventi contrari

La probabilità di un evento si può ottenere sottraendo da 1 la probabilità del suo evento contrario.

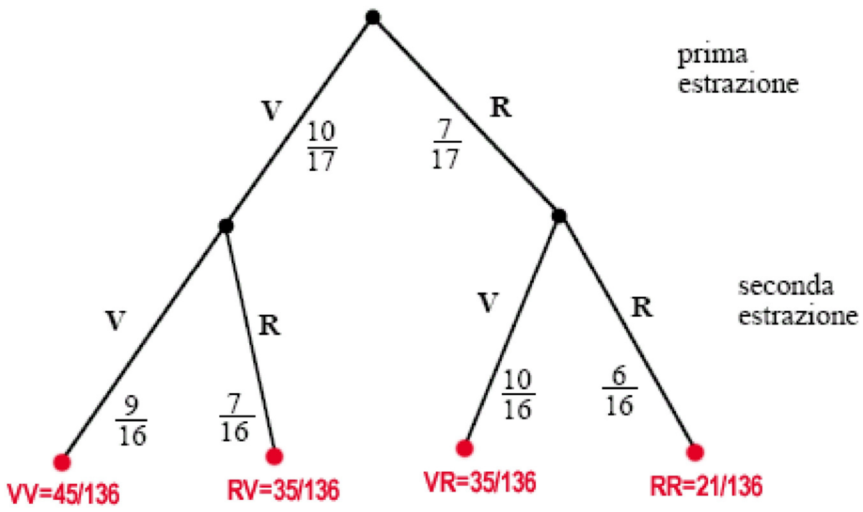
p(A) = 1-p(-A)

Esempio 1. Trovare la probabilità che, lanciando due dadi, si ottenga come somma delle facce almeno 4.
Dato che un punteggio maggiore o uguale di quattro si può ottenere in molti modi, conviene pensare l’evento come contrario a A = “si ottiene un punteggio inferiore a quattro”. Gli eventi favorevoli ad A sono le tre coppie (1, 1), (1, 2), (2, 1) per cui:
p(A) = 3/36 = 1/12
e la probabilità richiesta è:
p(A) = 1 - 1/12 = 11/12

Probabilità totale, composta e grafi ad albero

Esempio 1. (tratto dai materiali didattici del prof. **Dario Palladino**, Università di Genova - http://www.dif.unige.it/epi/hp/pal/dispense.htm)
Un’urna contiene 10 palline verdi e 7 palline rosse. Si estraggono successivamente due palline, senza rimettere la prima nell’urna.
Qual è la probabilità che siano:
a) dello stesso colore;
b) di colore diverso;
c) almeno una rossa?
Per risolvere questo problema aiutiamoci con un diagramma ad albero: i quattro rami

rappresentano i possibili percorsi fra loro incompatibili e, in ciascun tratto, è riportata la rispettiva probabilità.



Ad esempio, considerato il ramo a sinistra (**VV**), nel primo tratto figura la probabilità 10/17 che la prima pallina estratta sia verde, nel secondo la probabilità 9/16 che la seconda pallina sia verde nell'ipotesi che la prima sia verde (delle 16 palline ancora nell'urna, solo 9 sono verdi).
Così, nel ramo **RV**, nel primo tratto figura la probabilità 7/17 che la prima pallina estratta sia rossa, nel secondo la probabilità 10/16 che la seconda estratta sia verde nell'ipotesi che la prima pallina sia rossa (tra le 16 palline rimaste vi sono tutte e 10 le palline verdi).
a) Per la regola della probabilità composta, la probabilità che entrambe le palline siano verdi, ossia che si verifichi l'evento **VV**, è 10/17 · 9/16 = 45/136.
Analogamente, la probabilità che entrambe le palline siano rosse, ossia che si verifichi l'evento **RR**, risulta 7/17 · 6/16 = 21/136.
Quindi, la probabilità dell'evento "le palline sono dello stesso colore", ossia entrambe verdi o entrambe rosse, per la regola della probabilità totale, è 45/136+21/136 = 66/136 = 33/68.
b) Per calcolare la probabilità dell'evento "le palline sono di colore diverso", anziché sommare la probabilità che la prima sia verde e la seconda rossa con quella che la prima sia rossa e la seconda verde, possiamo sfruttare quanto ottenuto in a) e applicare la regola della probabilità dell'evento contrario; infatti l'evento "le palline sono di colore diverso" è contrario di "le palline sono dello stesso colore", e quindi la sua probabilità è1-33/68 = 35/68.
c) La probabilità dell'evento "almeno una pallina è rossa" è la somma delle probabilità dei tre eventi **VR**, **RV**, **RR**. Più rapidamente si può calcolare la probabilità dell'evento contrario a **VV** ("le palline sono entrambe verdi"): 1-45/136 = 91/136.

Nota. La schematizzazione mediante grafi ad albero (associare ad ogni diramazione un evento e la relativa probabilità) si può usare quando gli eventi associati agli archi di una diramazione ("l'uscita è pari" e "l'uscita è dispari" nell'esempio dei dadi) costituiscono un gruppo **completo** di eventi (cioè almeno uno di essi deve accadere) **incompatibili** (nessuno di essi può accadere contemporaneamente ad un altro).

Definizione di speranza matematica (di una vincita fortuita)

La **speranza matematica** (M) di una vincita (S) è il **prodotto** del **valore che si spera di vincere** per la **probabilità** di vincerlo (p(E)).

M = p(E) · S

Esempio 1. Un giocatore può vincere 72 EURO se, lanciando due dadi, ottiene un doppio 6.
Qual è la sua speranza matematica?
E = "Escono due 6"
p(E) = 1/36
M = 72·1/36 = 2 EURO

La sua speranza matematica è di vincere 2 EURO.
Che cosa significa?
Se gioca una sola volta, o vince 0 EURO o vince 72 EURO. Ma se gioca molte volte, la media che deve aspettarsi è di 2 EURO a giocata. Infatti, statisticamente, vincerà una giocata ogni 36, cioè 35 volte 0 EURO e 1 volta 72 EURO.
La media è:
media = $(35\cdot0+1\cdot72)/36 = 2$ EURO

Nota. In questo caso, la speranza matematica è il valore medio di una variabile casuale (X) che può assumere soltanto due valori.

Variabile casuale (X)	esce doppio 6 vincita = 72	non esce doppio 6 vincita = 0
Probabilità (p)	35/36	1/36

Più in generale, se S1, S2, …, Sn sono delle somme positive o negative (rispettivamente guadagni o perdite) la cui disponibilità è legata al verificarsi di n eventi che costituiscono una partizione dell'evento certo, si definisce speranza matematica (M) la somma dei prodotti delle Si per le rispettive probabilità:

$$\mathbf{M = S1\cdot p1 + S2\cdot p2 + \ldots + Sn\cdot pn}$$

La speranza matematica, anche in questo caso, è il **valore medio** della variabile casuale.

Definizione di gioco equo

Un gioco è **equo** se la **speranza matematica** è uguale a **zero**.

In molti (forse tutti?) i casi, il giocatore, per partecipare al gioco, deve pagare una posta (P). In questo caso, una definizione equivalente a quella precedente è:

Un gioco è **equo** se la **posta** (A) è uguale alla **speranza matematica di vincita** (M)

$$\mathbf{A = M}$$

Il rapporto **M/A** permette di valutare l'equità del gioco.

Esempio 1. Alla roulette francese, il gioco "rosso e nero" è equo?
Alla roulette ci sono 37 caselle, di cui 18 nere e 18 rosse.
Puntando sul rosso o sul nero, si incassa il doppio della posta.
Supponiamo di puntare 100 EURO sul rosso. E = "Esce rosso".
probabilità = p(E) = 18/37
posta: A = 100 EURO
vincita: S = 200 EURO
speranza matematica: M = 200·18/37 = 97,3 EURO
Per calcolare il "livello di equità" della roulette, si calcola il rapporto M/A.
M/A = 97,3/100 = 0,973 -> 97,3%
Il gioco è evidentemente non equo, ma non troppo sbilanciato.

Esempio 2. Il gioco del lotto, puntando su un numero singolo su una data ruota, è equo?
Supponiamo di puntare 100 EURO sul 25, ruota di Genova. E = "Esce il 25 sulla ruota di Genova".
probabilità = p(E) = 5/90 = 1/18
posta: A = 100 EURO
vincita: S = (1123,2 - 100) = 1023,2 EURO (11,232 volte la posta meno la posta stessa)
speranza matematica: M = 1023,2·1/18 = 56,84 EURO
Per calcolare il "livello di equità" dell lotto, puntando sull'Estratto, si calcola il rapporto M/A.
M/A = 56,84/100 = 0,5684 -> 56,84%
Il banco del lotto vince mediamente poco più del 43% delle puntate, contro il 2,7% di quello della roulette.

Esempio 3. Se il lotto fosse equo, quanto si dovrebbe vincere per aver indovinato un ambo su una data ruota?
probabilità ambo: p = 2/801
posta: A = 100 EURO

vincita lorda: 25000 EURO (250 volte la posta)
vincita netta: S = 24900 EURO (249 volte la posta)

Variabile casuale (X)	esce ambo vincita = 24900	non esce ambo vincita = -100
Probabilità (p)	2/801	799/801

Speranza matematica, con la vincita realmente assegnata:
$M = S1 \cdot p1 + S2 \cdot p2 = 24900 \cdot 2/801 - 100 \cdot 799/801 = -37{,}58$ EUR
Continuando a giocare, si perde in media il 37,58% delle puntate
Se invece il gioco fosse equo:
probabilità ambo: $p = 2/801$
posta: A = 100 EURO
vincita netta: S = ?
$A = S \cdot p$
$100 = 2S/801$
S = 80100/2 = 40050 EURO = 400,5 volte la posta.

Esempio 4. Il gioco dei 3 dadi.
Si tratta di un gioco assai diffuso nel medioevo. Su un grande tavolo è disegnato un rettangolo diviso in 6 quadrati, numerati da 1 a 6.
Il banco invita gli spettatori a puntare su uno dei sei numeri.
Terminate le puntate, il banco getta tre dadi.
Chi ha puntato sul numero uscito in uno qualsiasi dei tre dadi vince il valore della somma puntata.
Se il numero è presente su due dadi la vincita si raddoppia.
Se la "fortuna" fa uscire il numero su tutte e tre le facce, la vincita si triplica.

Il gioco è equo?

>>>... da risolvere...

Esempio 5. Un gioco con un mazzo da 40 carte.
Il giocatore estrae una carta.
Se la carta è un asso, vince 30 EURO
Se è una figura, vince 12 EURO
In tutti gli altri casi deve pagare 14 EURO
Calcolare la speranza matematica del giocatore.
Il gioco è equo?

Variabile casuale (X)	Asso +30	Figura +12	Né asso né figura -14
Probabilità (p)	4/40	12/40	24/40

La speranza matematica del giocatore è:
$\mathbf{M = S1 \cdot p1 + S2 \cdot p2 + S3 \cdot p3 = 120/40 + 144/40 - 336/40 = -1{,}8}$ **EURO**
Il gioco non è equo e il giocatore, facendo tante partite, perde in media 1,8 EURO a partita.

Ne vale la pena?

Quando una persona è disposta a dare qualcosa in cambio di qualcos'altro che potrà o non potrà ottenere, con un certo intervento del caso, in realtà sta facendo un gioco d'azzardo.

Se continua a ripeterlo è perché crede che sia equo o meglio vantaggioso per sé.

Se in realtà il gioco è svantaggioso, evidentemente la persona ha valutato male i guadagni oppure le perdite oppure le probabilità.

Questo può aiutare a capire le valutazioni personali di un individuo.

Esempio 1.

Variabile casuale (X)	Comportamento A vincita = A	Comportamento B vincita = -B

Probabilità (p)	p	1-p

M = Ap - B(1-p) >= 0

A >= B(1-p)/p

Esercizi

Tratti dal sito **Macosa** (MAtematica per COnoscere e per SApere, Dipartimento di Matematica, Università di Genova) - http://macosa.dima.unige.it

Lancio del dado
Un dado (equo) viene lanciato due volte. Qual è la probabilità che il punteggio ottenuto nel secondo lancio sia minore di quello ottenuto nel primo?
(A) 1/4 (B) 1/3 (C) 5/12 (D) 1/2 (E) 7/12

Sorteggio di una coppia
Una classe è formata da 13 femmine e 11 maschi. Vengono sorteggiati due alunni per far parte della selezione degli alunni della scuola che parteciperà alla festa organizzata in occasione della visita di una classe proveniente da un altro paese. Qual è le probabilità che la coppia sorteggiata sia tutta femminile? E quella che sia mista?

Tiro al bersaglio
Giorgio, al tiro al bersaglio, ha, statisticamente, una percentuale di successo del 20% (ossia la frequenza con cui centra il bersaglio è del 20%). Se non dispongo di altre informazioni, di fronte alla effettuazione di cinque tiri da parte di Giorgio, devo ritenere più probabile (1) che non colpisca mai il bersaglio, (2) che lo colpisca una sola volta o (3) che lo colpisca più di una volta?
A) i primi due eventi hanno la stessa probabilità, inferiore alla probabilità del terzo
B) i primi due eventi hanno la stessa probabilità, superiore alla probabilità del terzo
C) il primo evento è più probabile degli altri
D) il secondo evento è più probabile degli altri
E) il terzo evento è più probabile degli altri due, che hanno tra loro probabilità diverse

Pezzi difettosi
In una fabbrica che produce un particolare componente per computer alla fine del ciclo produttivo viene effettuato un controllo "a vista" che mediamente indivua ed elimina l'80% dei pezzi difettosi ma, erroneamente, elimina anche il 7% dei pezzi non difettosi. Supponiamo che si sappia che, in media, i pezzi difettosi prodotti sono il 10%. Qual è la probabilità che un pezzo che supera l'esame sia difettoso?

Test sanitario
Un certo test sanitario per valutare la presenza (esito positivo) o assenza (esito negativo) della malattia X ha attendibilità del 95% (in caso di presenza c'è il 95% di probabilità che l'esito sia positivo , in caso di assenza il 95% di probabilità che sia negativo). Si sa da statistiche serie che l'1% della popolazione è affetta dalla malattia X. Se per una persona il test dà esito positivo, qual è la probabilità che essa sia realmente malata?

Dipendenza indipendenza
Lancio un dado equo. Siano X l'evento "esce un numero pari", Y l'evento "esce 1 o 4" e Z l'evento "esce un numero minore o eguale a 3". Quale delle seguenti affermazioni è vera?
(A) X e Y sono entrambi indipendenti da Z
(B) X è indipendente da Z e Y non lo è
(C) Y è indipendente da Z e X non lo è
(D) X e Y sono entrambi dipendenti da Z
(E) Non ho informazioni sufficienti per stabilire quali tra le precedenti affermazioni è vera

Soluzioni

Lancio del dado
5/12

Sorteggio di una coppia
Si può fare un grafo ad albero.
p(coppia femminile - FF) = 13/46
p(coppia mista - MF or FM) = 143/276

Tiro al bersaglio

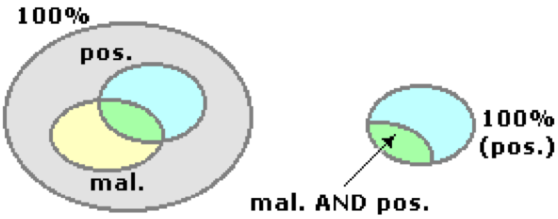
p(che non colpisca mai il bersaglio) = $0,8^4$

p(che lo colpisca una sola volta) = (0,2*0,8*0,8*0,8*0,8)*5 = $0,8^4$

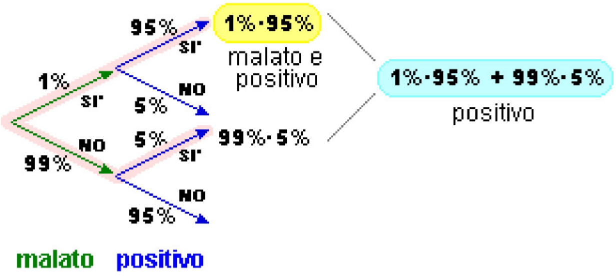
p(che lo colpisca più di una volta), è l'evento complementare dei primi due, =1 - ($0,8^5$+$0,8^4$)

Pezzi difettosi
Si può fare un grafo ad albero: inizio - difettoso/buono - preso/scartato.
Ogni 100 pezzi, quelli che superano l'esame mediamente sono 85,7, quelli tra questi difettosi sono 2. La frequenza con cui tra i pezzi che superano ve n'è uno difettoso è 2/85,7 = 2,3%. Questa è la probabilità cercata.
In altri termini:
p(EssereDifettoso | EsserePreso) =
= p(EssereDifettoso & EsserePreso) / p(EsserePreso) =
= 2/85,7 = 2,3%

Test sanitario



Si deve calcolare la probabilità condizionata di essere malato sotto la condizione di essere positivo:
p("essere malato" | "risultare positivo") =
= p("essere malato" et "risultare positivo") / p("risultare positivo") =
= 0,95% / 5,90% = 16%
Per calcolare p("risultare positivo") si può fare un diagramma ad albero: inizio - malato/non malato - positivo/negativo.



Questo esempio evidenzia il ruolo del calcolo delle probabilità nella razionalizzazione delle situazioni "incerte".
Esso **non è tuttavia sempre sufficiente**. Si pensi ai vaccini, che a volte hanno una certa probabilità di causare l'insorgere delle malattie stesse; per decidere se rendere obbligatoria una vaccinazione non basta trovare che tale probabilità è bassa rispetto alla diffusione della malattia: imporre a chi potrebbe rimanere sano una vaccinazione che può causare una malattia comporta valutazioni anche di tipo morale.

Dipendenza indipendenza
Y è indipendente da Z e X non lo è.

Data creazione: maggio 2008

Ultimo aggiornamento: gennaio 2013

xhtml 1.1

Sito Web realizzato da **Gianfranco Bo**